

# DALLE DIVISIONI SUCCESSIVE ALLE SERIE

---

BRIGNONE Barbara  
CORTESE Davide  
MARCHI Gloria  
MORRA Domenico

VII Convegno di. fi.ma - V GeoGebra Italian day.

9 Ottobre 2015

# INTRODUZIONE

Progetto in un'ottica di didattica a spirale

A. Prima superiore

B. Terza superiore

C. Quarta / Quinta superiore

# A. Prima Superiore

Abilità interessate	Conoscenze e prerequisiti	Nodi coinvolti
Lettura ed interpretazione di un problema.  Modellizzazione di un problema concreto  Risoluzione di un problema.  Analizzare la correttezza di un ragionamento o di una soluzione in un dato contesto.  Capacità di generalizzare un problema    Manipolazione di semplici equazioni	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.  Frazioni.  Operazioni con le frazioni.  Equazioni  Geometria elementare  Operazioni con i segmenti	Numeri  Argomentare, congetturare  Risolvere e porsi problemi



# ATTIVITA' A.1

## Situazione Problema I TRE VIAGGIATORI

*“Tre viaggiatori arrivano in una locanda e ordinano patate lesse. Quando l'oste porta il piatto con le patate i tre, stanchi come sono per il lungo viaggio, dormono profondamente. Poco dopo uno di loro si sveglia, mangia un terzo delle patate e si riaddormenta. Poi un altro dei tre viaggiatori si sveglia e, non sapendo che il primo aveva mangiato la sua parte, mangia un terzo di quello che trova nel piatto e torna a dormire. Infine il terzo viaggiatore, pur pensando che le patate sono ben poche per tre persone, per correttezza verso i compagni mangia al suo risveglio un terzo di quello che trova. Quando l'oste torna per sparecchiare la tavola, trova otto patate. Quante patate aveva preparato?”*



# ATTIVITA' A.1

---

## Contesto

L'attività si colloca in una classe prima della scuola secondaria di secondo grado a inizio anno scolastico con i seguenti obiettivi:

- Ripassare le frazioni
- Unire il gruppo classe appena formato
- Approccio a lavori di tipo laboratoriale
- Sviluppare la capacità di argomentazione



# ATTIVITA' A.1

---

## Metodologie didattiche

Suddivisione della classe in piccoli gruppi di tre persone.

Ogni gruppo è fornito di:

- 30 palline
- uno spago
- strisce di carta.

Scheda di  
laboratorio

# ATTIVITA' A.2

---

## Situazione Problema I TRE VIAGGIATORI

*“I tre viaggiatori, usciti dalla locanda, si mettono in viaggio verso la loro meta. Dopo aver percorso un terzo del loro percorso, incontrano un mercante che, in segno di amicizia, li carica sul suo carro, permettendo loro di percorrere un terzo del percorso rimanente. Quando il mercante li lascia, essi riprendono il loro viaggio fino a quando, dopo aver percorso un terzo del percorso, trovano una locanda in cui si fermano per la notte. Se il giorno dopo restano loro 36 chilometri da percorrere, quanto era lungo il loro percorso? E se invece i chilometri restanti fossero 40, quanto era lungo il loro percorso?”*





# ATTIVITA' A.2

---

## Contesto

L'attività si colloca in una classe prima della scuola secondaria di secondo grado che abitualmente svolge attività laboratoriali in piccoli gruppi e che sappia presentare e argomentare i propri risultati.

L'attività è volta a potenziare il ragionamento in situazioni problematiche, la capacità di modellizzazione di problemi concreti e l'argomentazione dei risultati ottenuti.



# ATTIVITA' A.2

---

## Metodologie didattiche

Suddivisione della classe in piccoli gruppi di tre persone.

[Scheda](#) di  
laboratorio

# COLLEGAMENTI TRA LE PRIME DUE ATTIVITA'

---

- Passaggio dal discreto al continuo
- Risoluzione 'a ritroso' o tramite equazione

Video da presentare in aula tramite LIM:

- Le equazioni di primo grado (<https://youtu.be/jaqDFhPOQyg>)
- Il teatrino matematico (<https://youtu.be/QNSyV7fdIak>)

Possibile lavoro con GeoGebra:

- [Strada e segmenti](#) (Prerequisito – [Talete](#))



# A. Terza Superiore

Livello scolastico	Classe III di un Liceo Scientifico
Tipologia	Attività manuale ed esplorazione guidata con Geogebra
Obiettivi finali: conoscenza	Conoscere l'equazione e le caratteristiche del grafico di una funzione esponenziale e logaritmica, decrescente e crescente.
Obiettivi finali: abilità	Saper tracciare il grafico di una funzione esponenziale e della sua inversa a partire dall'equazione, e saperle traslare.
Obiettivi finali: competenze	Dal grafico di un'esponenziale risalire all'equazione.
Prerequisiti matematici	<ul style="list-style-type: none"><li>- Linguaggio naturale e linguaggio simbolico</li><li>- Potenza di un numero naturale e di una frazione</li><li>- Concetto di funzione</li><li>- Concetto di parametro</li><li>- Grafico di una funzione a 2 variabili</li><li>- La traslazione di una curva e le sue equazioni (già viste per le coniche)</li></ul>
Prerequisiti Geogebra	<ul style="list-style-type: none"><li>- Utilizzo foglio di calcolo e passaggio al grafico</li><li>- Inserimento equazione di una funzione con parametro (slider)</li></ul>

Metodologia	Lavoro individuale con Geogebra e di gruppo (listelli, chitarra) Attività manuale ed esplorazione mediante software
Materiale necessario	PC con Geogebra, seghetto da traforo, listello di legno da 2 m, metro flessibile o riga, carta trasparente, matita, piattini di plastica e/o tovaglioli di carta, coltello da torta e... torta! Non indispensabile: chitarra (a casa), sostituibile con una buona foto.
Possibili ostacoli cognitivi	Passaggio dal discreto (punti rilevati) al continuo (curva)
Tempi	1) 2h + 1h 2) 1h30' 3) 1h30' a casa, 1h in classe
Verifiche	Valutazione dell'attività assegnata per casa (attività 3). 2° parte della verifica seguente ( <i>per la prima parte della verifica prevedere 4-5 ore di lezione/esercitazione sulla risoluzione delle principali tipologie di equazioni e disequazioni esponenziali, viste anche graficamente. Evidenziare in particolare il legame tra la regola del cambio di verso delle disequazioni nel passaggio agli esponenti quando la base è minore di 1 e il relativo grafico decrescente, richiamando l'esperienza di laboratorio fatta</i> ).



# ATTIVITA' B.1

---

**I viaggiatori siete voi...  
ma c'è anche un prof goloso.**

*“Noi tutti ragazzi siamo compagni di viaggio, e un nostro amico ci mette a disposizione un alloggio per fare tappa. Giulia ha avuto la splendida idea di preparare una torta al limone, la mia preferita... Quindi decido io come spartirla: a ogni taglio ognuno ne prenderà metà di quella che resta, e ovviamente il primo a tagliare sarò io....*



# Valutazione del lavoro in seguito a sperimentazione

[Scheda](#) di  
laboratorio

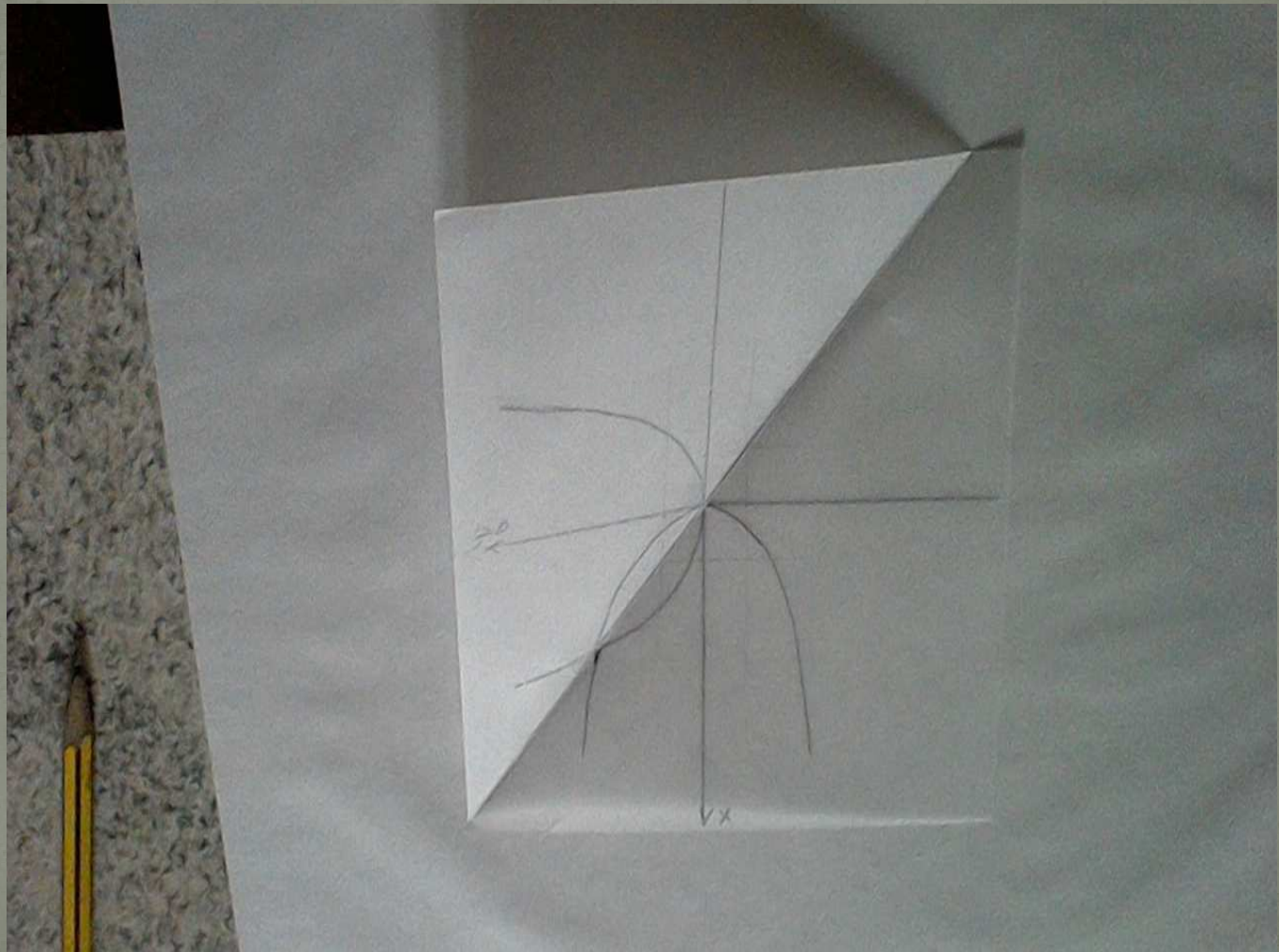
*TORTA: mi è toccato cedere la fetta di torta più grande all'allievo più alto di me!*



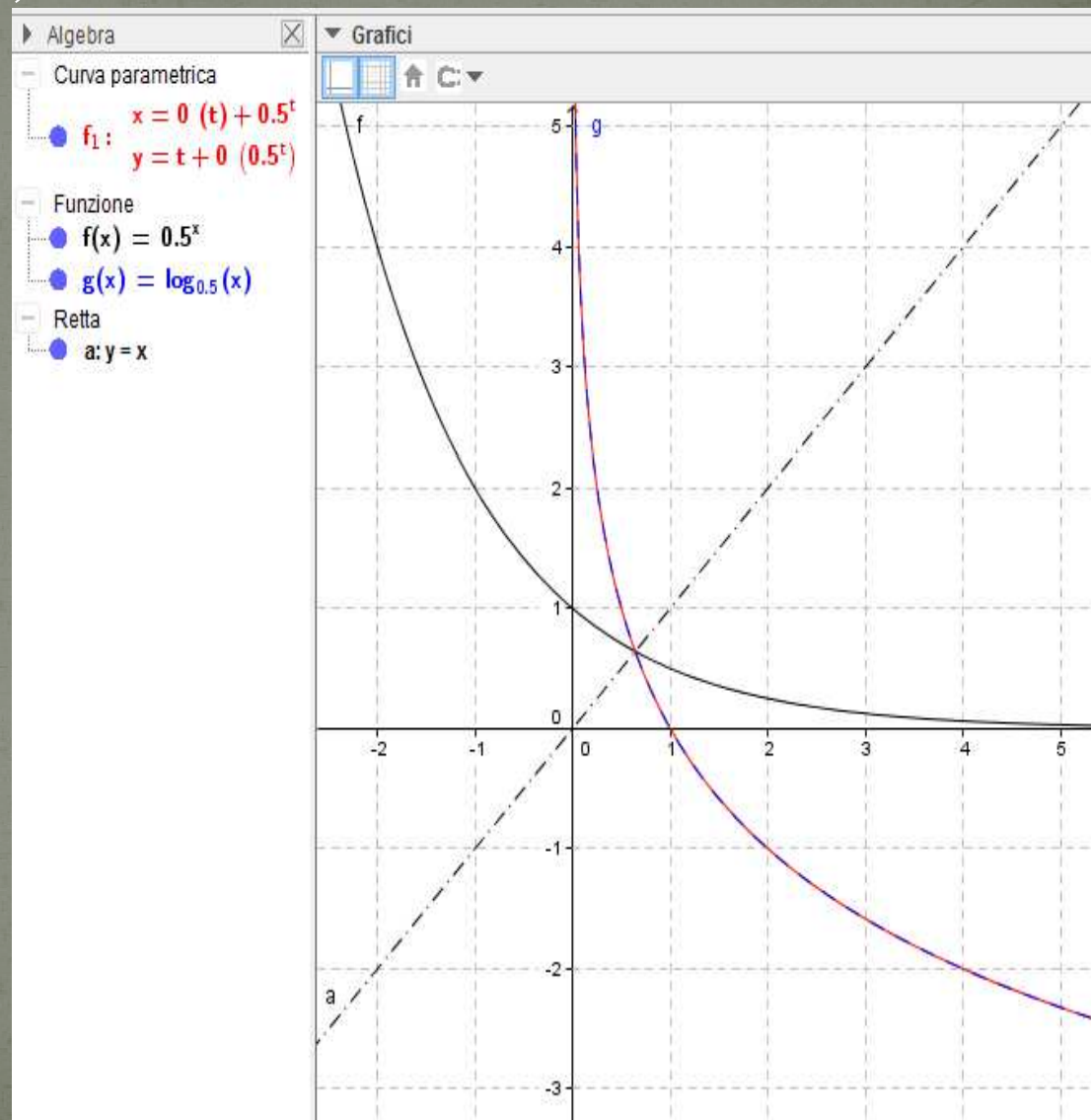
1a - TORTA: mi è toccato cedere la fetta di torta più grande all'allievo più alto di me!



*Inversione grafica di una funzione con carta trasparente (Inverso del problema della torta)*



$f_1$  è stata ottenuta mediante simmetria  
rispetto alla bisettrice,  
 $g(x)$  con il comando  
 $\text{inv}[f]$ .





## ATTIVITA' B.2

---

Supponiamo di fare una cosa simile con un listello di legno lungo 2 m (serve un addetto al taglio).

A mano a mano che tagliate, appoggiate i segmenti di listello alla parete, in modo che siano equidistanti.

Fate una foto che comprenda dal primo all'ultimo sotto-listello, scaricatela sul PC e, in un secondo file Geogebra, caricate la foto come sfondo.

Provate a inserire un'equazione che dia una curva passante per le sommità dei sotto-listelli... difficile vero?

Provate inserendo nell'equazione uno o più parametri, gestendoli come slider. Individuate l'effetto che ciascun parametro ha sul grafico di partenza.

*LISTELLI... vari oggetti limitano l'evidenza dei listelli, e il listello di partenza... è solo virtuale (segno col gesso).*



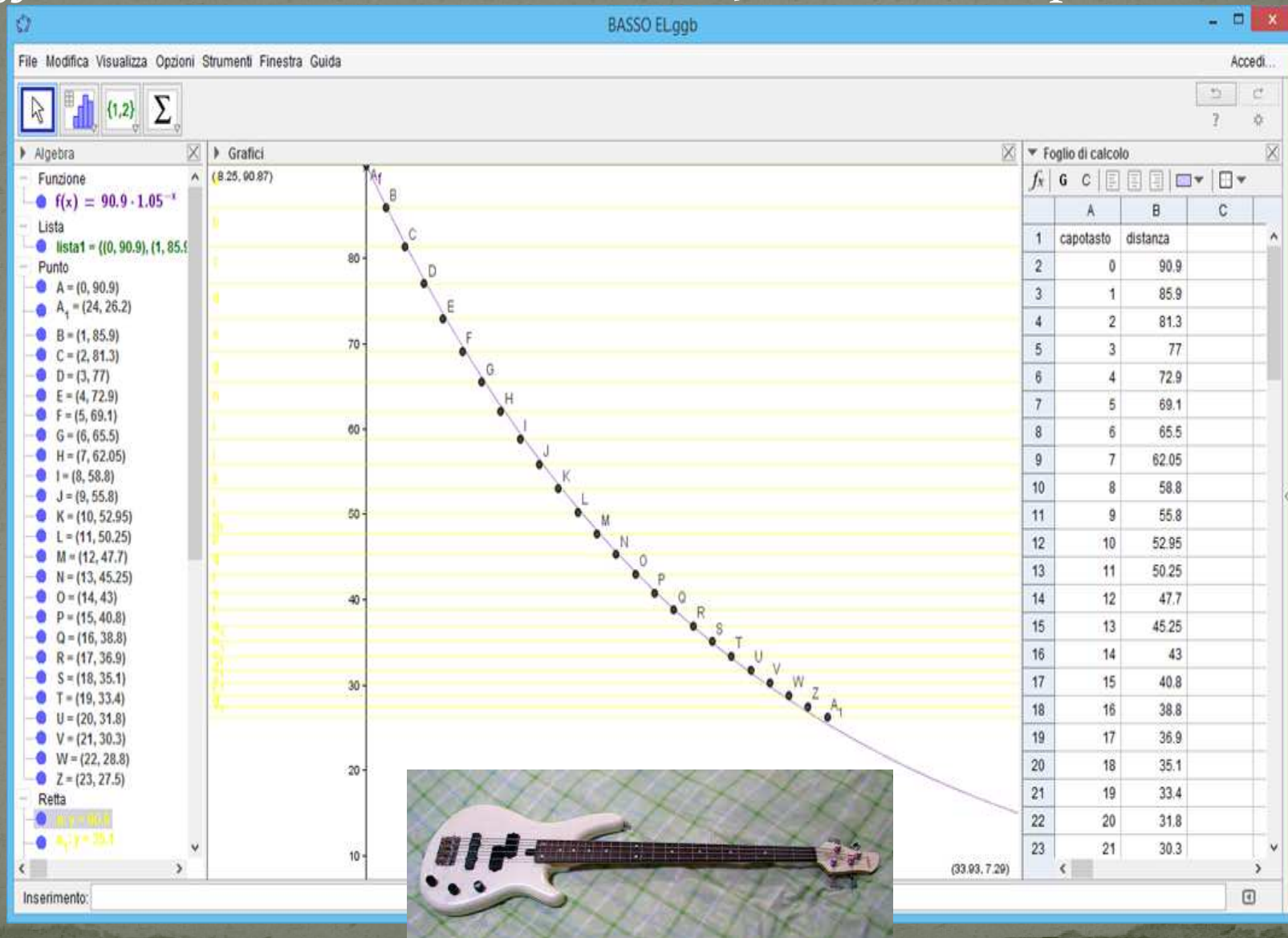


# ATTIVITA' B.3 (da fare a casa)

---

- A casa ognuno di voi avrà una chitarra anche vecchia... anche senza corde... l'importante è che abbia i capotasti (barrette metalliche che suddividono il manico). A coppie, misurate, con un metro flessibile o una riga lunga, le distanze tra il ponte (vicino alla buca) e ciascun capotasto, partendo dal più lontano (quello al manico). Caricate sul foglio di calcolo di Geogebra in una colonna il numero progressivo di capotasto (o quello al ponte, 1 il primo a destra, etc.) e nell'altra le distanze. Osservate il grafico ottenuto e provate come per i listelli a trovare l'equazione della curva "interpolante".
- Se non avete una chitarra, usate una foto presa dalla rete.
- Occhio: le chitarre elettriche sovente hanno 24 tasti, quelle acustiche di solito meno. Potete fermarvi al 20°.
- Confrontate poi con i compagni le diverse ma simili curve ottenute.

*Esempio di curva esponenziale ottenuta dalle misure effettuate sul basso elettrico a 24 tasti sotto riportato.*





Risultati	<p>L'attività per casa è stata svolta con cura da tutti, il confronto in classe è stato proficuo. Prova scritta (1h): l'item 4 relativo al grafico di due funzioni esponenziali e la relativa traslazione è stato svolto da tutti correttamente, i due allievi più deboli hanno sbagliato solo la scrittura delle equazioni della traslazione.</p> <p>L'item 5 di competenza, che richiedeva di risalire alle equazioni a partire dal grafico di 2 esponenziali (peraltro traslate in maniera differente) è stato svolto completamente solo da un allievo, 3 hanno trovato solo la prima equazione, 2 hanno tradotto correttamente la traslazione verticale ma non sono riusciti a risalire alla base. Dalla successiva discussione del compito, è emerso che la traslazione verticale, essendo messa in evidenza dall'equazione dell'asintoto, è stata individuata più facilmente di quella orizzontale. Solo 2 allievi hanno cambiato di verso la disequazione passando agli esponenti! Bisogna considerare che c'è stato poco tempo per esercitarsi, infatti la parte sulle equazioni/disequazioni logaritmiche è stata inserita come compito per le vacanze, insieme ad un recupero sulle disequazioni esponenziali.</p> <p>Dal punto di vista degli obiettivi di conoscenza ed abilità relativi all'attività di laboratorio, direi che l'esito è stato positivo, soprattutto per quanto riguarda il senso del grafico.</p>
Comportamento studenti uguale/diverso rispetto alla lezione tradizionale	<p>Trattandosi di una classe molto piccola (9) e abbastanza motivata, gli allievi seguono già con partecipazione la maggior parte delle lezioni tradizionali, con domande e congetture. L'attività di laboratorio (la seconda fatta con loro quest'anno) ha accentuato la loro curiosità ed entusiasmo. Un allievo di livello medio-basso si è spontaneamente preso carico di tutto l'aspetto pratico e ha procurato i materiali e le foto in maniera molto efficiente. Nessuno di loro ha utilizzato il PC per altri scopi, le esercitazioni si sono svolte speditamente ed anche il lavoro a casa è stato fatto bene.</p>
Difficoltà incontrate (ambientali, didattiche, etc.)	<p>Difficoltà a trovare una parete libera per la foto dei listelli, con conseguente spostamento di mobilia!</p> <p>Tendenza degli allievi ad arrivare al risultato visuale tralasciando l'aspetto analitico. Il passaggio dal discreto al continuo non sembra averli turbati, ma forse perché non si sono posti troppe domande!</p>
Pro-memoria	<p>Preparare prima parete libera.</p>

# C. Quarta/Quinta superiore

<b>Livello scolastico</b>	<b>Classe IV/V di un Liceo Scientifico</b>
<b>Tipologia</b>	<b>Calcoli ed esplorazione guidata con Excel</b>
<b>Obiettivi finali: conoscenza</b>	<b>Definizione ed esempi di successione Formule chiuse e formule ricorsive Classificazione delle successioni Limite di una successione Serie</b>
<b>Obiettivi finali: abilità</b>	<b>- Saper riconoscere e distinguere le successioni e serie presentate - Saper operare con esse</b>
<b>Obiettivi finali: competenze</b>	<b>Applicare le conoscenze e abilità acquisite nella risoluzione di problemi di tipo realistico</b>
<b>Prerequisiti matematici</b>	<b>– Attività degli anni precedenti – Funzioni esponenziali e logaritmiche</b>
<b>Prerequisiti Excel</b>	<b>Minimi</b>
<b>Metodologia</b>	<b>Lavoro a gruppi senza imposizioni sulla tecnologia da sfruttare</b>
<b>Materiale consigliato</b>	<b>Calcolatrice scientifica PC con Excel o programma analogo</b>
<b>Tempi</b>	<b>6 ore</b>
<b>Verifiche</b>	<b>Prova scritta</b>



# ATTIVITA' C.1

---

Osserva le seguenti successioni:

- A: 1, 2, 3, 4, 5, ...,  
B: 3, 6, 9, 12, 15, ...,  
C: 5, 8, 11, 14, 17, ...,  
D: 1, 3, 6, 10, 15, ...,  
E: 3, 9, 27, 81, 243, ...,  
F: 2, 3, 5, 7, 11, ...,

■ Quali saranno i numeri seguenti? Spiega come/cosa hai fatto per individuarli.

■ Aiutandoti (se ti è comodo) con un foglio di calcolo Excel, individua i valori di posto 20 di ogni successione.

■ Quali successioni contengono il numero 1275? In quale posizione? Giustificate la vostra risposta.

■ È possibile trovare un numero naturale diverso da 0 tale che nessuna successione prenderà in considerazione?

.....

# ATTIVITA' C.1

---

Segue parte di formalizzazione sulle  
nozioni di successione, formula chiusa,  
formula ricorsiva.

Possibile misconcetto!!!  
Non tutte le successioni  
ammettono tutti i tipi di  
formula



# ATTIVITA' C.2

---

Considera le seguenti successioni:

A:  $s(n) = 2n - 3$

B:  $s(n) = 15 - \frac{n}{2}$

C:  $s(n) = 3^n$

D:  $s(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

E:  $s(n) = (-2)^2$

F:  $s(n) = \frac{n}{n+1}$

G:  $s(n) = \frac{n^2}{n+1}$

H:  $s(n) = \frac{4n^2 - n}{2n^2 + 1}$

I:  $s(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Aiutandoti con un foglio di calcolo, esplora il loro andamento e prova a caratterizzarlo con una sintetica frase descrittiva.

# ATTIVITA' C.2

---

Segue fase di istituzionalizzazione sui vari tipi di successione e sulla nozione di limite.

.

Possibile misconcetto!!

Non tutte le successioni  
ammettono limite

Non avere limite non  
significa tendere all'infinito



# ATTIVITA' C.3

---

## PROBLEMA 1

*Giulio vuole allenarsi per correre su grandi distanze. Decide di percorrere 500 metri il primo giorno di allenamento e poi di aggiungere 10 metri in più ogni giorno. Il suo allenatore gli dice che, quando avrà percorso complessivamente 100 chilometri, sarà pronto per affrontare la maratona. Fra quanti giorni avverrà tutto questo? Come cambierebbe la situazione se al primo allenamento Giulio percorresse 800 metri, oppure se partendo da 500 metri decidesse di aggiungere 20 metri in più ogni giorno?*

# ATTIVITA' C.3

---

## PROBLEMA 2

*Un gruppo di operai deve asfaltare per il Comune di Montechiaro una strada lunga 200 metri. Se nella prima fase dei lavori essi ne costruiscono una parte lunga 100 metri, nella seconda fase una parte lunga 50 metri, nella terza una parte lunga 25 metri, e così via, quante fasi di lavorazione occorreranno per completare l'opera?*

## PROBLEMA 3

*Il Comune di Montechiaro deve far realizzare una strada lunga 3 km e, vista la brutta esperienza precedente, decide di chiamare una ditta specializzata. La ditta propone di realizzare 1 km di strada nella prima fase, mezzo chilometro nella seconda fase, un terzo di chilometro nella terza fase, e così via. Il Comune è un po' dubbioso sulla serietà di tale impresa. Che cosa gli consigliereste?*



# ATTIVITA' C.3

---

## PROBLEMA 4

*Nel mezzo di uno stagno c'è una bella ninfea. Le sue dimensioni raddoppiano ogni giorno ed esattamente in venti giorni arriverà a coprire l'intero stagno. Dopo quanti giorni la ninfea coprirà mezzo stagno?*

Segue fase di istituzionalizzazione sulla nozione di serie e le sue proprietà.

**Possibile misconcetto!!**

**Confusione tra successione generatrice e successione delle ridotte**

GRAZIE!!!!